PROCESO DE GESTIÓN DE FORMACIÓN PROFESIONAL INTEGRAL

FORMATO GUÍA DE APRENDIZAJE

IDENTIFICACIÓN DE LA GUIA DE APRENDIZAJE

- Denominación del Programa de Formación: MODELADO DIGITAL DE PRODUCTOS INDUSTRIALES
- Código del Programa de Formación:
- Nombre del Proyecto:
- Fase del Proyecto: Planeación
- Actividad de Proyecto:
- Competencia: 240201528 Razonar cuantitativamente frente a situaciones susceptibles de ser abordadas de manera matemática en contextos laborales, sociales y personales.
- Resultados de aprendizaje alcanzar:
  Plantear problemas aritméticos, geométricos y métricos de acuerdo con los contextos productivo y social.
- Duración de la Guía: 12 horas

2. PRESENTACIÓN

El desarrollo de la humanidad se ha dado a partir de las dificultades o necesidades que se presentan a lo largo de la historia, por ejemplo, el hombre primitivo sintió hambre entonces tuvo la necesidad de buscar comida fuese cazándola, colectándola o cultivándola; sintió frío entonces desarrolló el fuego y encontró la manera de cubrirse con pieles de animales.

Así mismo pasó con el desarrollo de las matemáticas, más específicamente con el surgimiento de los números y los conjuntos numéricos que eran utilizados para contar, hacer cálculos, resolver problemas, y demás actividades que requerían de la implementación del uso de las matemáticas.

En este espacio, nos ocuparemos en el estudio de los conjuntos numéricos: ¿qué son? ¿para qué sirven? ¿cómo se aplican?, conceptos que nos ayudarán a entender la naturaleza de los números y poder comprender el desarrollo de los temas posteriores de este curso.

3. FORMULACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

DESARROLLO DE LA GUÍA DE APRENDIZAJE 2: El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y sus operaciones básicas

NÚMEROS NATURALES

Daremos inicio con el conjunto de los números naturales que se denotan con la letra (N).

N = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,.....}

El conjunto de los números naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.

Este conjunto se caracteriza porque:

- Tiene un número infinito de elementos.
- Cada elemento tiene un sucesor y todos, excepto el 1, un antecesor.
- El sucesor de un número natural, se obtiene sumando uno (+1); el antecesor se obtiene restando uno (-1).

Representación en la recta numérica de los naturales



NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros surgieron de la necesidad de incluir números negativos para dar solución a algunos problemas de matemáticas que no tendrían solución solo con números naturales.

Algunos ejemplos del uso de los números enteros son los siguientes: Señalar una temperatura bajo cero en la escala Celsius (“En estos momentos, la temperatura en Bariloche es de -10°”) o una profundidad bajo el nivel del mar (“El barco hundido fue hallado a -135 metros”).

Este conjunto numérico nos permite realizar las operaciones básicas como la suma, la resta, la multiplicación y la división, los hindúes fueron los precursores en el manejo de los números enteros, siguiendo unas reglas específicas; para la suma y la resta se utiliza la recta numérica y para la multiplicación y la división se hace uso de la ley de signos:

+ por + = + - por - = +

+ por - = - - por + = -

En materia de multiplicación hay que subrayar además que existen diversas propiedades como son la asociativa, la distributiva o la conmutativa.

Continuemos con el conjunto de los números enteros que se denotan con la letra (Z).

Z = {. . ., –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .}

Los números negativos aparecieron dada la necesidad de representar deudas, se identifican añadiendo un símbolo o color diferente a los naturales (-1, -2, -3, -4, -5).

Revisemos sus principales características:

Z = Son la unión de los números naturales positivos, el cero y los números negativos.

Z = Tiene 3 subconjuntos:

Enteros negativos: Z^-

Enteros positivos: Z^+

Enteros positivos y el cero: $Z^+ \cup \{ 0 \}$

Por lo tanto, el conjunto de los números enteros, es la unión de los tres subconjuntos mencionados.

$$\mathbf{Z = Z^- \cup \{ 0 \} \cup Z^+}$$



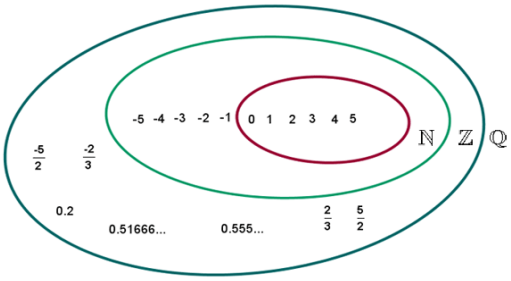
¿QUÉ SON LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)?

Video: https://www.youtube.com/watch?v=ql3lLSwsr98

Definición: Se llama número racional a aquel que puede representarse de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y más exactamente b debe ser diferente de cero. Su nombre de racional hace referencia a fracción o parte de un todo.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; a, b \; \in \boldsymbol{Z}, b \neq 0 \right\}$$

El símbolo $\frac{a}{b}$ lo denominaremos fracción o número racional de numerador ***a*** y denominador ***b.***



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

❖ **Orden de los números racionales:**

Los números racionales se pueden representar como fracciones o como números decimales, los cuales a su vez pueden ser decimales finitos o infinitos periódicos.

Las relaciones de orden en los racionales se establecen por medio de los siguientes criterios:

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si a x d > b x c

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si a x d < b x c

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si a x d = b x c

EJEMPLO

Comparar $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{11}$

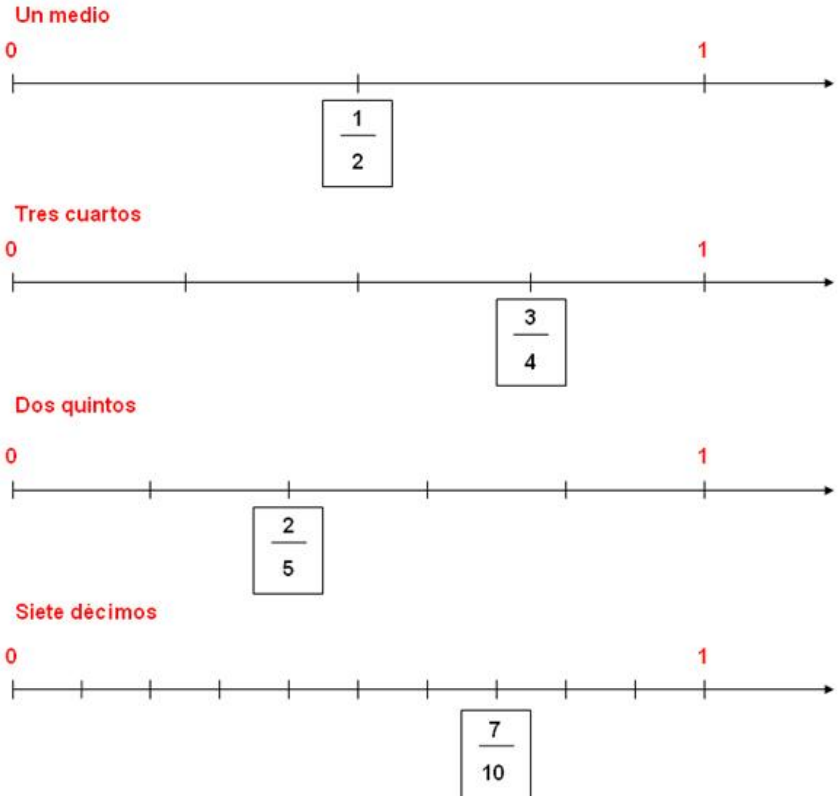
Aplicando los criterios de las relaciones de orden para los racionales, se tiene que:

3 x 11 = 33 y 5 x 8 = 40, entonces $\frac{3}{8} < \frac{5}{11}$

❖ **Representación en la recta de los números racionales**

Q^- Q^+

0



❖ **Números Fraccionarios y Números Decimales**

- **Expresión de los números racionales en forma decimal**

Cualquier número racional escrito en su forma fraccionaria puede representarse como un decimal, al efectuar la división entre el numerador y el denominador.

EJEMPLO:

Expresar el siguiente racional en forma decimal: $\frac{5}{22}$

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 22 \\
\hline
50 & 0{,}22727\ldots \\
60 & \\
160 & \\
60 & \\
160 &
\end{array}
$$

- **Expresión de los números decimales en forma fraccionaria**

Dado un decimal cualquiera al que llamaremos *x*, es posible determinar la fracción que lo origina o que lo genera, multiplicando por una potencia adecuada de 10 y después restando para eliminar la parte que se repite.

EJEMPLO

x = 3,5474747...

1000x = 3547,474747...

10x = 35,474747...

990x = 3512,0

De este modo $x = \frac{3512}{990}$

❖ **Operaciones con los números racionales**

Ahora bien, la aritmética es la rama de las matemáticas cuyo objetivo de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos (suma, resta, multiplicación y división), en este sentido la aritmética de las fracciones se ocupa de las operaciones elementales hechas con ellos. Para este fin, se detallará principalmente lo relacionado con la suma y la resta.

La suma de fracciones puede desarrollarse de las siguientes maneras:

Para operar fracciones con igual denominador (homogéneas) se suman o se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador. Así

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} ; b \neq 0$$

Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$; $b \neq 0;\ d \neq 0$ se tiene que

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \pm (b \times c)}{b \times d}$$

❖ **Adición y sustracción con fraccionarios**

Para adicionar fraccionarios con igual denominador (homogéneos) se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador.

EJEMPLO

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)+\left(\frac{-7}{3}\right)=\frac{2+(-5)+(-7)}{3}$$

$$=\frac{-10}{3}$$

Para restar fraccionarios con igual denominador (homogéneos) se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador.

EJEMPLO

$$\frac{11}{3}-\frac{7}{3}=\frac{11-7}{3}=\frac{4}{3}$$

Para adicionar y sustraer fraccionarios con diferente denominador (heterogéneos) existen varias formas:

EJEMPLOS

1. $\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5\times6+1\times4}{4\times6}=\frac{30+4}{24}=\frac{34}{24}=\frac{17}{12}$

2. $\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5\times6-1\times4}{4\times6}=\frac{30-4}{24}=\frac{26}{24}=\frac{13}{12}$

Se puede concluir que la suma de dos fracciones heterogéneas es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda **más** el producto del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera; y como denominador el producto de los denominadores.

De igual manera para restar fracciones heterogéneas se sigue el mismo procedimiento cambiando la suma del numerador por una resta.

3. $\left(\frac{-6}{7}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)$

$$= \frac{(21 \div 7) \times (-6) + (21 \div 3) \times (-2)}{m.c.m(7,3) = 21}$$

$$= \frac{3 \times (-6) + 7 \times (-2)}{21}$$

$$= \frac{(-18) + (-14)}{21}$$

$$= -\frac{32}{21}$$

4. $\frac{4}{3} - \frac{5}{2} = \frac{(6 \div 3) \times 4 - (6 \div 2) \times 5}{m.c.m.(2,3) = 6}$

$$= \frac{2 \times 4 - 3 \times 5}{6}$$

$$= \frac{8 - 15}{6}$$

$$= -\frac{7}{6}$$

Se puede concluir que la suma fracciones heterogéneas es otra fracción que tiene como denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores (m.c.m.) de los sumandos, y como numerador el resultado de dividir el m.c.m. de los denominadores de los sumandos entre el denominador del primer sumando, a ese resultado se lo multiplica por el numerador de dicho sumando; **más** el resultado de dividir el m.c.m. de los denominadores de los sumandos entre el denominador del segundo sumando, a ese resultado se lo multiplica por el numerador de dicho sumando.

De igual manera, para restar fracciones heterogéneas se sigue el procedimiento anterior cambiando la suma del numerador por una resta.

❖ **Adición y sustracción con decimales**

Para adicionar números decimales se escriben las cantidades de tal forma que las comas queden una debajo de la otra; los espacios vacíos se pueden completar con ceros.

EJEMPLO

15,3 + 85 + 0,24 + 43,675 =

15,300 +
85,000
0,240
43,675

Para restar números decimales, se procede de manera análoga a la suma.

EJEMPLO

207,3 – 95,654 =

207,300 -
95,654
111,646

❖ **Multiplicación con fraccionarios**

Al multiplicar fraccionarios se obtiene una nueva fracción, que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

EJEMPLO

$$\frac{8}{5} \times \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{8 \times (-5)}{5 \times 12} = \frac{(-40)}{60} = -\frac{2}{3}$$

❖ **Multiplicación con decimales**

Al multiplicar decimales se realiza la multiplicación como en los naturales, y el número de decimales del producto es la suma de decimales de los factores.

EJEMPLO

84,236 x (-7,4) =

8 4, 2 3 6 → 3 cifras decimales

x -7,4 → 1 cifra decimal.

-6 2 3,3 4 6 4 → 4 cifras decimales.

❖ **División con fraccionarios**

Existen varias formas para dividir fraccionarios

1. Para dividir dos fraccionarios, se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor (o inverso multiplicativo). Recuérdese que el recíproco de un número se obtiene al dividir 1 entre dicho número; por ejemplo, el recíproco de 2 es ½.

EJEMPLO

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{8}$$

2. La división de dos fraccionarios es otro fraccionario que tiene como numerador el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda; y como denominador el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda.

EJEMPLO

$$\frac{9}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{9 \times 5}{6 \times 4} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$$

❖ **División con decimales**

1. División entre un decimal y un entero

En este caso, se realiza el algoritmo de la división de la misma manera que en los enteros, pero se debe tener en cuenta que cuando bajemos la primera cifra decimal, ponemos una coma en el cociente y continuamos dividiendo.

EJEMPLO

526,6562 ÷ 7 =

```
526,6562    7
 36         75,2366
  16
   25
    46
     42
      0
```

2. División entre un entero y un decimal

Para este proceso, se multiplica el divisor y el dividendo por una potencia de dos hasta convertir el divisor en entero, y se procede a dividir.

EJEMPLO

5126 ÷ 62.37 = 512600÷6237; pues

5622 x 100=562200

62,37 x 100=6237

3. División entre dos decimales

Se multiplica el dividendo y el divisor por una potencia de 10 hasta que el divisor se convierta en un entero y se procede como en **1.**

EJEMPLO

1,52 ÷ 4,5 = 15,2 ÷ 45

Porque 1,52 x 10 = 15,2 y 4,5 x 10 = 45.

EJEMPLO

Para preparar una taza de chocolate la receta es la siguiente: por cada $\frac{2}{4}$ de litro de leche se agregan $\frac{5}{3}$ de una pastilla de chocolate. Para acompañar el chocolate se usan $\frac{3}{5}$ de libra de queso.

Si se desea preparar 9 tazas de chocolate, ¿Cuántas pastillas de chocolate se usarán?, ¿Cuántos litros de leche se debe emplear?, ¿Cuánto queso se debe servir en la mesa?.

Sabemos que para una sola taza de chocolate la cantidad de leche, el número de pastillas de chocolate y la cantidad de queso son las siguientes:

$\frac{2}{4}$ de 1000 ml de leche; es decir 500 ml de leche

$\frac{5}{3}$ de pastillas de chocolate; es decir, 1 pastilla de chocolate y $\frac{2}{3}$ más.

$\frac{3}{5}$ de 500 g de queso; es decir, 300 g de queso.

Por lo tanto para 9 tazas de chocolate se necesitan las siguientes cantidades:

Leche: 500ml x 9 = 4500 ml

Pastillas de chocolate: $1\frac{2}{3}$ pastillas x 9 = 15 pastillas

Queso: 300g x 9 = 2700 g.

NÚMEROS IRRACIONALES (Q*)

Pero aún hay más, conjunto de números irracionales denotado con la letra (Q*) con un asterisco.

$$Q^* = \{ \ldots, -\pi, -\sqrt{5}, -\varphi, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \varphi\sqrt{5}, \pi, \ldots \}$$

Conjunto de números decimales infinitos no periódicos

Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las raíces inexactas, el número Pi, etc.

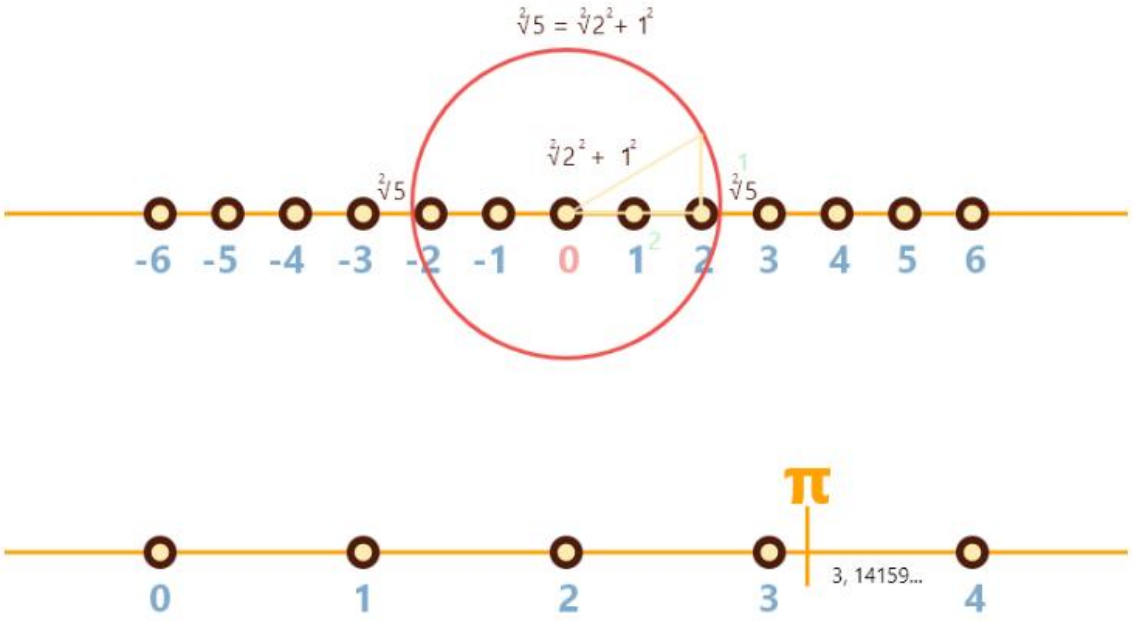
A él pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que sí pueden transformarse en una fracción.

EJEMPLOS

1,4142135....

0,10200300004000005...

Surgen de la imposibilidad de expresar numéricamente ciertas cantidades como una razón entre dos números enteros. Un ejemplo de ellos es la razón entre la circunferencia y el diámetro.



NÚMEROS REALES (R)

Ya casi finalizamos, miremos el conjunto de números reales denotados por la letra (R).

$$\mathbf{R = \{ \ldots, -10, -1, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \sqrt{2}, 5, \ldots \}}$$

Surgen de la necesidad de reunir los racionales y los irracionales en un solo conjunto. Se denotan por R.

$$R = \{ Q \cup Q^* \}$$

Es el conjunto numérico que contiene tanto a los números racionales como a los irracionales.



Materiales: Calculadoras

Evidencia: Taller: El conjunto de los números reales y sus operaciones básicas

Recursos:

Los números naturales: https://www.youtube.com/watch?v=hd5qnZfGO1c

Los números enteros: https://www.youtube.com/watch?v=dayfz0ff1Mc

Los números racionales: https://www.youtube.com/watch?v=qI3lLSwsr98

Los números irracionales: https://www.youtube.com/watch?v=1yGBocOCki0&t=4s

Los números reales: https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ

4. ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

Evidencias de Aprendizaje	Criterios de Evaluación	Técnicas e Instrumentos de Evaluación
Evidencias de desempeño. Taller procedimientos aritméticos usando el conjuntos de los números reales.	**Criterios de evaluación** Desarrollar procedimientos aritméticos aplicados a las operaciones básicos del conjunto de los números reales.	Planteamiento y resolución de problemas. Trabajo colaborativo.

5. GLOSARIO DE TÉRMINOS

6. REFERENTES BILBIOGRÁFICOS

7. CONTROL DEL DOCUMENTO

	Nombre	**Cargo**	**Dependencia**	**Fecha**
Autor (es)				

8. CONTROL DE CAMBIOS (diligenciar únicamente si realiza ajustes a la guía)

	Nombre	**Cargo**	**Dependencia**	**Fecha**	**Razón del Cambio**
Autor (es)					